Negociación y Cooperación en Juegos con Dos Agentes

Alvaro J. Riascos Villegas

Mayo de 2017

Motivación

- Negociaciones bilaterales en el sector de gas natural en Colombia.
- Negociaciones bilaterales en el sector de la salud: IPSs y EPSs.

Motivación

- Negociaciones bilaterales en el sector de gas natural en Colombia.
- Negociaciones bilaterales en el sector de la salud: IPSs y EPSs.

Motivación

- Redistribución de recursos en una caja de Edgeworth.
  - Los agentes pueden estar de acuerdo sobre la redistribuciones que ninguno de los dos quiere (aquellas que no son individualmente racionales para ambos).
  - Cualquier redistribución de recursos individualmente racional mejoraría a ambos pero podría ser ineficiente.
  - Cualquier redistribución de recursos en el núcleo sería individualmente racional y eficiente.
- La pregunta es, cuál de esta multiplicidad de resultados posibles se puede alcanzar mediante una negociación.
- Es necesario precisar el protocolo de negociación.

Motivación

- Redistribución de recursos en una caja de Edgeworth.
  - Los agentes pueden estar de acuerdo sobre la redistribuciones que ninguno de los dos quiere (aquellas que no son individualmente racionales para ambos).
  - Cualquier redistribución de recursos individualmente racional mejoraría a ambos pero podría ser ineficiente.
  - Cualquier redistribución de recursos en el núcleo sería individualmente racional y eficiente.
- La pregunta es, cuál de esta multiplicidad de resultados posibles se puede alcanzar mediante una negociación.
- Es necesario precisar el protocolo de negociación.

Motivación

- Redistribución de recursos en una caja de Edgeworth.
  - Los agentes pueden estar de acuerdo sobre la redistribuciones que ninguno de los dos quiere (aquellas que no son individualmente racionales para ambos).
  - Cualquier redistribución de recursos individualmente racional mejoraría a ambos pero podría ser ineficiente.
  - Cualquier redistribución de recursos en el núcleo sería individualmente racional y eficiente.
- La pregunta es, cuál de esta multiplicidad de resultados posibles se puede alcanzar mediante una negociación.
- Es necesario precisar el protocolo de negociación.

Motivación

- Cooperar: Actuar coordinadamente para alcanzar un objetivo común.
- La teoría de juegos se basa en la inteligencia y racionalidad de agentes que toman decisiones individuales.
- Nash propone que la cooperación puede estudiarse usando este paradigma (no cooperativo) en el que las acciones resultantes son el resultado de de cierto tipo de negociación.
- Una vez se introduce la posibilidad de negociación el juego se puede representar como un juego estratégico (posiblemente en forma extensiva).
- El programa de Nash consiste en encontrar soluciones cooperativas de un juego que se puedan obtener como soluciones de un juego estratégico.

Motivación

- Cooperar: Actuar coordinadamente para alcanzar un objetivo común.
- La teoría de juegos se basa en la inteligencia y racionalidad de agentes que toman decisiones individuales.
- Nash propone que la cooperación puede estudiarse usando este paradigma (no cooperativo) en el que las acciones resultantes son el resultado de de cierto tipo de negociación.
- Una vez se introduce la posibilidad de negociación el juego se puede representar como un juego estratégico (posiblemente en forma extensiva).
- El programa de Nash consiste en encontrar soluciones cooperativas de un juego que se puedan obtener como soluciones de un juego estratégico.

- Cooperar: Actuar coordinadamente para alcanzar un objetivo común.
- La teoría de juegos se basa en la inteligencia y racionalidad de agentes que toman decisiones individuales.
- Nash propone que la cooperación puede estudiarse usando este paradigma (no cooperativo) en el que las acciones resultantes son el resultado de de cierto tipo de negociación.
- Una vez se introduce la posibilidad de negociación el juego se puede representar como un juego estratégico (posiblemente en forma extensiva).
- El programa de Nash consiste en encontrar soluciones cooperativas de un juego que se puedan obtener como soluciones de un juego estratégico.

Motivación

- Cooperar: Actuar coordinadamente para alcanzar un objetivo común.
- La teoría de juegos se basa en la inteligencia y racionalidad de agentes que toman decisiones individuales.
- Nash propone que la cooperación puede estudiarse usando este paradigma (no cooperativo) en el que las acciones resultantes son el resultado de de cierto tipo de negociación.
- Una vez se introduce la posibilidad de negociación el juego se puede representar como un juego estratégico (posiblemente en forma extensiva).
- El programa de Nash consiste en encontrar soluciones cooperativas de un juego que se puedan obtener como soluciones de un juego estratégico.

Motivación

- Cooperar: Actuar coordinadamente para alcanzar un objetivo común.
- La teoría de juegos se basa en la inteligencia y racionalidad de agentes que toman decisiones individuales.
- Nash propone que la cooperación puede estudiarse usando este paradigma (no cooperativo) en el que las acciones resultantes son el resultado de de cierto tipo de negociación.
- Una vez se introduce la posibilidad de negociación el juego se puede representar como un juego estratégico (posiblemente en forma extensiva).
- El programa de Nash consiste en encontrar soluciones cooperativas de un juego que se puedan obtener como soluciones de un juego estratégico.

Motivación

- Una consecuencia inmediata es que van aparecer una infinidad de equilibrios. Por ejemplo, en los juegos con contratos estudiadas anteriormente se obtienen un gran número de equilibrios: todo equilibrio individualmente racional correlacionado se puede obtener como un equilibrio con contratos.
- Schelling's (1960): Los agentes tienden a enfocarse en resultados que son determinados por factores exógenos como factores culturales, ambientales, etc. Equilibrio focales.
- Una forma de implementar estos equilibrios es permitiendo algun tipo de comunicación con anticipación al juego, una negociación previa o con la ayuda de un agente mediador que hace recomendaciones individualmente racionales y compatibles en incentivos (i.e., equilibrio correlacionado).

- Una consecuencia inmediata es que van aparecer una infinidad de equilibrios. Por ejemplo, en los juegos con contratos estudiadas anteriormente se obtienen un gran número de equilibrios: todo equilibrio individualmente racional correlacionado se puede obtener como un equilibrio con contratos.
- Schelling's (1960): Los agentes tienden a enfocarse en resultados que son determinados por factores exógenos como factores culturales, ambientales, etc. Equilibrio focales.
- Una forma de implementar estos equilibrios es permitiendo algun tipo de comunicación con anticipación al juego, una negociación previa o con la ayuda de un agente mediador que hace recomendaciones individualmente racionales y compatibles en incentivos (i.e., equilibrio correlacionado).

- Una consecuencia inmediata es que van aparecer una infinidad de equilibrios. Por ejemplo, en los juegos con contratos estudiadas anteriormente se obtienen un gran número de equilibrios: todo equilibrio individualmente racional correlacionado se puede obtener como un equilibrio con contratos.
- Schelling's (1960): Los agentes tienden a enfocarse en resultados que son determinados por factores exógenos como factores culturales, ambientales, etc. Equilibrio focales.
- Una forma de implementar estos equilibrios es permitiendo algun tipo de comunicación con anticipación al juego, una negociación previa o con la ayuda de un agente mediador que hace recomendaciones individualmente racionales y compatibles en incentivos (i.e., equilibrio correlacionado).

Motivación

- Por ejemplo, considere el juego de dividir un dólar (estático): Dos personas anuncian de forma simultánea cuantos centavos quieren de un dólar. Si la suma no es factible sus pagos son ceros.
- Es claro que existen una infinidad de equilibrios (todas los anuncios que suman exactamente un dólar) pero hay uno que es particularmente equitativo (y eficiente). En este caso las propiedades de equidad y eficiencia sirven para focalizar el equilibrio que debe recomendar el mediador.
- La ideas de negociaciones previas puede resultar muy complicada debido a la gran variedad de posibilidades (similar a la idea de comunicación previa en los juegos con comunicación).

Motivación

- Por ejemplo, considere el juego de dividir un dólar (estático): Dos personas anuncian de forma simultánea cuantos centavos quieren de un dólar. Si la suma no es factible sus pagos son ceros.
- Es claro que existen una infinidad de equilibrios (todas los anuncios que suman exactamente un dólar) pero hay uno que es particularmente equitativo (y eficiente). En este caso las propiedades de equidad y eficiencia sirven para focalizar el equilibrio que debe recomendar el mediador.
- La ideas de negociaciones previas puede resultar muy complicada debido a la gran variedad de posibilidades (similar a la idea de comunicación previa en los juegos con comunicación).

Motivación

- Por ejemplo, considere el juego de dividir un dólar (estático): Dos personas anuncian de forma simultánea cuantos centavos quieren de un dólar. Si la suma no es factible sus pagos son ceros.
- Es claro que existen una infinidad de equilibrios (todas los anuncios que suman exactamente un dólar) pero hay uno que es particularmente equitativo (y eficiente). En este caso las propiedades de equidad y eficiencia sirven para focalizar el equilibrio que debe recomendar el mediador.
- La ideas de negociaciones previas puede resultar muy complicada debido a la gran variedad de posibilidades (similar a la idea de comunicación previa en los juegos con comunicación).

Motivación

- Una forma de hacer manejable el problema de negociación previa es usando este principio de equidad: *El resultado de una negociación efectiva en la que los jugadores tienen todos la misma oportunidad de participación debe ser el mismo que la recomendación hecha por un mediador que tiene la información que es conocimiento común de los jugadores durante la negociación.*
- Es decir, de acuerdo a esta hipótesis la predicción de la teoría positiva de juegos cooperativos en la que los jugadores tienen igual oportunidad de participación debe coincidir con la teoría normativa prescrita por un mediador imparcial.

Motivación

- Una forma de hacer manejable el problema de negociación previa es usando este principio de equidad: *El resultado de una negociación efectiva en la que los jugadores tienen todos la misma oportunidad de participación debe ser el mismo que la recomendación hecha por un mediador que tiene la información que es conocimiento común de los jugadores durante la negociación.*
- Es decir, de acuerdo a esta hipótesis la predicción de la teoría positiva de juegos cooperativos en la que los jugadores tienen igual oportunidad de participación debe coincidir con la teoría normativa prescrita por un mediador imparcial.

Modelo de Negociación de Nash

Definition

Un juego (o problema) de negociación es una pareja (S, d) donde:

1. $S \subset R^2$, no vacio, compacto y convexo. El conjunto de alternativas.
2. $d = (d_1, d_2) \in S$ es el punto de desacuerdo o conflicto.
3. Existe $x \in S$ tal que $x >> d$.

- Sea F la colección de todos los juegos de negociación.
- La interpreatción del modelo es que si los dos jugadores no llegan a un arreglo el resultado es el punto de desacuerdo.

Modelo de Negociación de Nash

- Los acuerdos alcanzados se supone que son de obligatorio cumplimiento (binding) por ejemplo debido al peso de la Ley.
- Esto contrasta con la teoría de juegos no cooperativos en el que los agentes siempre tiene la posibiliad de optar por cualquier otra acción (si no lo hacen es porque no es de su interés individual).

Modelo de Negociación de Nash: Transformaciones cooperativas

- Este modelo puede obtenerse de un juego en forma normal $(\{1,2\}, S_1, S_2, \pi_1, \pi_2)$ de la siguiente forma.
- Si existen contratos (de obligatorio cumplimiento) $S = \{(\pi_1(\sigma), \pi_2(\sigma)) : \sigma \in \Delta(S_1 \times S_2), \pi_i = \sum_{s \in S_1 \times S_2} \sigma(s)\pi_i(s)\}$.
- Si existe riesgo moral en el juego de tal forma que no es posible crear este tipo de contratos entonces S es el conjunto de las utilidades esperadas en todos los equilibrios correlacionados.
- Algunas posibilidades para los puntos de desacuerdo son: el valor minmax para cada jugador, el pago para cada jugador en un punto focal o algun otro equilibrio del juego estratégico.

Definition

Una solución de un juego de negociación es una $\phi : F \to R^2$ tal que $\phi(S) \in S$.

- Vamos imponer algunas restricciones naturales sobre el concepto de solución.
  1. Simetría.
  2. Eficiencia.
  3. Invariante frente a transformaciones afines positivas.
  4. Independencia de alternativas irrelevantes.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

Definition

Un juego de negociación es simetrico si:

1. $d_1 = d_2$
2. $(x_1, x_2) \in S$ entonces $(x_2, x_1) \in S$

- Geométricamente el conjunto S debe ser simétrico con respecto a la línea $x_2 = x_1$.
- Un concepto de solución ϕ es simétrico si para todo juego de negociación simétrico (S, d), $\phi_1(S, d) = \phi_2(S, d)$.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

Definition

Una alternativa $x \in S$ es eficiente si no existe $y \in S, y \neq x$ tal que $y \geq x$.

- Sea $PO(S)$ el conjunto de todas las alterntivas eficientes de S.
- Un concepto de solución ϕ es eficiente si para todo juego de negociación (S, d), $\phi(S, d) \in PO(S)$
- De forma análoga se define $PO^W(S)$ el conjunto de todas las alterntivas débilmente eficientes de S y un concepto de solución débilmente eficiente.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

- Cuando las alternativas representan resultados monetarios, es natural suponer que el concepto de solución es independiente de las unidades.
- Adiconalemente el beneficio de la negociacion no debe depender de la cantidad incial de dinero de los jugadores: si se le añade un constante al conjunto de resultados, la solución se desplaza en la misma cantidad (esta hipótesis desconoce la actitud frente al riesgo de los jugadores).

Definition

Un concepto de solución ϕ es covariante bajo cambio de unidades y traslaciones si para todo $a >> 0, b$

$$\phi(aS + b, ad + b) = a\phi(S, d) + b \tag{1}$$

- Obsérvese que la $aS + b$ es una operación sobre conjuntos y $a\phi(S, d) + b$ es una operación coordenada por coordenada.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

- Cuando las alternativas representan resultados monetarios, es natural suponer que el concepto de solución es independiente de las unidades.
- Adiconalemente el beneficio de la negociacion no debe depender de la cantidad incial de dinero de los jugadores: si se le añade un constante al conjunto de resultados, la solución se desplaza en la misma cantidad (esta hipótesis desconoce la actitud frente al riesgo de los jugadores).

Definition

Un concepto de solución ϕ es covariante bajo cambio de unidades y traslaciones si para todo $a >> 0, b$

$$\phi(aS + b, ad + b) = a\phi(S, d) + b \tag{1}$$

- Obsérvese que la $aS + b$ es una operación sobre conjuntos y $a\phi(S, d) + b$ es una operación coordenada por coordenada.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

- Cuando las alternativas representan resultados monetarios, es natural suponer que el concepto de solución es independiente de las unidades.
- Adiconalemente el beneficio de la negociacion no debe depender de la cantidad incial de dinero de los jugadores: si se le añade un constante al conjunto de resultados, la solución se desplaza en la misma cantidad (esta hipótesis desconoce la actitud frente al riesgo de los jugadores).

Definition

Un concepto de solución ϕ es covariante bajo cambio de unidades y traslaciones si para todo $a >> 0, b$

$$\phi(aS + b, ad + b) = a\phi(S, d) + b \tag{1}$$

- Obsérvese que la $aS + b$ es una operación sobre conjuntos y $a\phi(S, d) + b$ es una operación coordenada por coordenada.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

- La propiedad de covarianza es muy natural cuando las alternativas se miden en utilidades de jugadores con funciones de utilidad en forma de utlidad esperada.
- Decimos que una solución es individualmente racional si $\phi(S, d) \geq d$.
- Por simplicidad (y sin pérdida de generalidad cuando se cumple la propiedad de covarianza) vamos supone que $d = 0$.

Modelo de Negociación de Nash: Propiedades concepto solución

Definition

Un concepto de solución ϕ satisface la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes si para todo problema de negociación $(S, d), (T, d)$ y $S \subset T$:

$$\phi(T, d) \in S \rightarrow \phi(T, d) = \phi(S, d) \tag{2}$$

Ejemplos: Egalitarimso

- Intepretamos S como el conjunto de utilidades (esperadas) posibles de los jugadores.
- Igualitarismo (Egalitarismo): $d = 0, S$ simétrico. $\phi_E(S)$ maximiza la función de bienestar social de Rawls (lo que importa es la utilidad de la persona que menos utilidad tiene en la sociedad). Geométricamente es un punto eficiente de Pareto en el que todos tienen la misma utilidad. Satisface todas las propiedades (incluyendo racionalidad individual) menos inv. a tranformaciones afines.

Ejemplos: Utilitarismo

- Utilitarismo: $d = 0, S$ estrictamente convexa. $\phi_U(S)$ maximiza la suma de la utilidades. Satisface todas las propiedades menos inv. a tranformaciones afines.

Modelo de Negociación de Nash: Teorema de Nash

Theorem (Nash)

Existe un único concepto de solución N para la familia F que satisface simetría, eficiencia, covarianza frente a transformaciones afines positivas y la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes. La solución es la que resuelve el siguiente problema:

$$\max_{x \geq d, x \in S} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \tag{3}$$

- Nótese la interpretación geométrica de este resultado ($d = 0, x_1 \times x_2$ es una función cuasi cóncava).
- La prueba consiste de tres pasos: (1) La solución a este problema es única. (2) La solución satisface los cuatro axiomas de Nash y (3). Es única.

- Luce y Raifa [1957]

15.7 Critiques of the properties of the Nash solution

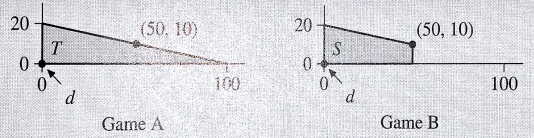

Figure 15.15 The bargaining game $(T, (0, 0))$, and the bargaining game $(S, (0, 0))$

- La solución del juego de la figura A es razonable pero no lo es el de la figura B.

Críticas a la solución de Nash

- Kalai y Smorodinsky [1975]

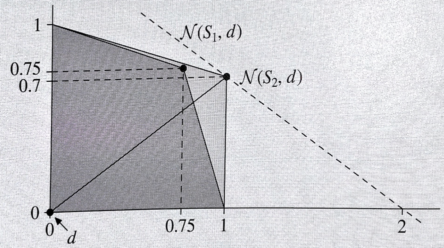

Figure 15.16 The Kalai–Smorodinsky critique of the Nash solution

- Argumentan que el juego (S_2, d_2) ofrece oportunidades para ambos mejorar estrictamente (aunque uno de ellos más que el otro). Luego la solución debería de dominar a la solución del juego (S_1, d_1). Sin embargo, la solución de Nash es como aparece en la figura.

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- La definición de un problema de negociación con n-agentes es idéntica.
- Intepretamos el resultado de una negociación como el resultado de de una negociación en la que los N jugadores acuerdan un resultado particular. Caso contrario el resultado es el punto de desacuerdo.
- La teoría de juegos cooperativos generaliza el problema a situaciones en la que se pueden formar diferentes grupos del conjunto de jugadores. Como veremos más adelante, el modelo de negociación de Nash se puede considerar un caso particular de un problema de juegos coalicionales sin utilidad transferible.

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- La definición de un problema de negociación con n-agentes es idéntica.
- Intepretamos el resultado de una negociación como el resultado de de una negociación en la que los N jugadores acuerdan un resultado particular. Caso contrario el resultado es el punto de desacuerdo.
- La teoría de juegos cooperativos generaliza el problema a situaciones en la que se pueden formar diferentes grupos del conjunto de jugadores. Como veremos más adelante, el modelo de negociación de Nash se puede considerar un caso particular de un problema de juegos coalicionales sin utilidad transferible.

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- La definición de un problema de negociación con n-agentes es idéntica.
- Intepretamos el resultado de una negociación como el resultado de de una negociación en la que los N jugadores acuerdan un resultado particular. Caso contrario el resultado es el punto de desacuerdo.
- La teoría de juegos cooperativos generaliza el problema a situaciones en la que se pueden formar diferentes grupos del conjunto de jugadores. Como veremos más adelante, el modelo de negociación de Nash se puede considerar un caso particular de un problema de juegos coalicionales sin utilidad transferible.

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- Sea F^N el conjunto de todos los problemas de negociación con N jugadores y F^* el conjunto de todos los problemas de negociación con un número finito de jugadores.
- Las definiciones de soluciones de un juego son análogas al caso de dos jugadores.
- Las definiciones de eficiencia, covarianza, independencia de alternativas irrelevantes y simetría son análogas (simetría se define como las clasura del espacio de alternativas frente a permutaciones arbitrarias de los índices).

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- Sea F^N el conjunto de todos los problemas de negociación con N jugadores y F^* el conjunto de todos los problemas de negociación con un número finito de jugadores.
- Las definiciones de soluciones de un juego son análogas al caso de dos jugadores.
- Las definiciones de eficiencia, covarianza, independencia de alternativas irrelevantes y simetría son análogas (simetría se define como las clasura del espacio de alternativas frente a permutaciones arbitrarias de los índices).

- Sea F^N el conjunto de todos los problemas de negociación con N jugadores y F^* el conjunto de todos los problemas de negociación con un número finito de jugadores.
- Las definiciones de soluciones de un juego son análogas al caso de dos jugadores.
- Las definiciones de eficiencia, covarianza, independencia de alternativas irrelevantes y simetría son análogas (simetría se define como las clasura del espacio de alternativas frente a permutaciones arbitrarias de los índices).

Modelo de Negociación de Nash con N-Jugadores

- Teorema de Nash: Existe una única solución para los problemas de negociación F^* que satisface las hipótesis análogas del problema con dos jugadores.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un vendedor y un comprador de un bien pueden tener costos o valoraciones que hacen eficiente intercambiar el bien.
- Sin embargo, los términos de intercambio pueden ser un continuo de precios y puede ser un problema cómo repartirse el excedente social del intercambio.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un vendedor y un comprador de un bien pueden tener costos o valoraciones que hacen eficiente intercambiar el bien.
- Sin embargo, los términos de intercambio pueden ser un continuo de precios y puede ser un problema cómo repartirse el excedente social del intercambio.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un dólar para dividir.
- Dos agentes de forma simultánea e independiente anuncian cuantos centavos demandan del dólar: n_1, n_2 respectivamente.
- Si $n_1 + n_2 \leq 100$ el juego se acaba y cada uno recibe lo que demando (podría quedar plata sobre la mesa).
- Si $n_1 + n_2 > 100$ se juega una segunda etapa donde cada agente observa la demanda de su adversario. En esta etapa cada agente de forma simultánea e independiente anuncia si se mantiene firme en su demanda o si accede a que su contrincante se lleve lo que demandó y él se queda con la demana residual.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un dólar para dividir.
- Dos agentes de forma simultánea e independiente anuncian cuantos centavos demandan del dólar: n_1, n_2 respectivamente.
- Si $n_1 + n_2 \leq 100$ el juego se acaba y cada uno recibe lo que demando (podría quedar plata sobre la mesa).
- Si $n_1 + n_2 > 100$ se juega una segunda etapa donde cada agente observa la demanda de su adversario. En esta etapa cada agente de forma simultánea e independiente anuncia si se mantiene firme en su demanda o si accede a que su contrincante se lleve lo que demandó y él se queda con la demana residual.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un dólar para dividir.
- Dos agentes de forma simultánea e independiente anuncian cuantos centavos demandan del dólar: n_1, n_2 respectivamente.
- Si $n_1 + n_2 \leq 100$ el juego se acaba y cada uno recibe lo que demando (podría quedar plata sobre la mesa).
- Si $n_1 + n_2 > 100$ se juega una segunda etapa donde cada agente observa la demanda de su adversario. En esta etapa cada agente de forma simultánea e independiente anuncia si se mantiene firme en su demanda o si accede a que su contrincante se lleve lo que demandó y él se queda con la demana residual.

Modelo Básico: Ofertas simultáneas

- Un dólar para dividir.
- Dos agentes de forma simultánea e independiente anuncian cuantos centavos demandan del dólar: n_1, n_2 respectivamente.
- Si $n_1 + n_2 \leq 100$ el juego se acaba y cada uno recibe lo que demando (podría quedar plata sobre la mesa).
- Si $n_1 + n_2 > 100$ se juega una segunda etapa donde cada agente observa la demanda de su adversario. En esta etapa cada agente de forma simultánea e independiente anuncia si se mantiene firme en su demanda o si accede a que su contrincante se lleve lo que demandó y él se queda con la demana residual.

Modelo Básico Dinámico: Ofertas simultáneas

- Si los dos se mantienen firmes se acaba el juego sin negociación (el dólar se queda sobre la mesa).
- Si los dos acceden, cada uno se lleva la demanda residual del adversario (quedando plata sobre la mesa).
- Si solo uno accede, ese recibe la demanda residual del adversario y el adversario se lleva lo que demandó (no se deja plata sobre la mesa).

Modelo Básico Dinámico: Ofertas simultáneas

- Si los dos se mantienen firmes se acaba el juego sin negociación (el dólar se queda sobre la mesa).
- Si los dos acceden, cada uno se lleva la demanda residual del adversario (quedando plata sobre la mesa).
- Si solo uno accede, ese recibe la demanda residual del adversario y el adversario se lleva lo que demandó (no se deja plata sobre la mesa).

- Si los dos se mantienen firmes se acaba el juego sin negociación (el dólar se queda sobre la mesa).
- Si los dos acceden, cada uno se lleva la demanda residual del adversario (quedando plata sobre la mesa).
- Si solo uno accede, ese recibe la demanda residual del adversario y el adversario se lleva lo que demandó (no se deja plata sobre la mesa).

Modelo Básico Dinámico: Equilibrio de Nash

- El juego de negociación induce un juego en forma extensiva.
- Para cada $n = 0, .., 100$ hay un equilibrio donde el primer jugador recibe n y el segundo jugador recibe $100 - n$:
  - Estrategia jugador 1: Demandar n y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
  - Estrategia jugador 2: Demandar $100 - n$ y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
- Es fácil mostrar que es Nash y es eficiente.

Modelo Básico Dinámico: Equilibrio de Nash

- El juego de negociación induce un juego en forma extensiva.
- Para cada $n = 0, .., 100$ hay un equilibrio donde el primer jugador recibe n y el segundo jugador recibe $100 - n$:
  - Estrategia jugador 1: Demandar n y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
  - Estrategia jugador 2: Demandar $100 - n$ y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
- Es fácil mostrar que es Nash y es eficiente.

Modelo Básico Dinámico: Equilibrio de Nash

- El juego de negociación induce un juego en forma extensiva.
- Para cada $n = 0, .., 100$ hay un equilibrio donde el primer jugador recibe n y el segundo jugador recibe $100 - n$:
  - Estrategia jugador 1: Demandar n y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
  - Estrategia jugador 2: Demandar $100 - n$ y mantenerse firme en caso de tener que volver a jugar.
- Es fácil mostrar que es Nash y es eficiente.

Modelo Básico: Equilibrio de Nash

- El resultado es robusto a variaciones del protocolo (veáse Kreps, A Course in Microeconomic Theory, páginas 553-554).

- El equilibrio de Nash mencionado anteriormente no es EPS: Cada n_1 y n_2, con $n_1 + n_2 > 100$ ofertados por los dos jugadores, definen un subjuego apartir del cual los jugadores debe decir de forma simultánea si están firmes o acceden a las pretensiones del adversario. Considere el subjuego que comienza en $n_1 = 75$ y $n_2 = 75$ (este no es el equilibrio pero es una posible forma de jugar el juego). En este caso aquí comienza un subjuego.

- Ahora el equilibrio propuesto induce mantenerse firme en las demandas (que tiene resultado cero para ambos). Sin embargo cada uno de los jugadores tendría un incentivo unilateral a desviarse y ganar 25.

- Ejercicio (Equilibrio EPS): Considere esta variación de la estrategias (para cada $n = 0, 1, ..,100$). En caso de tener que jugar la segunda ronda, 1 accede en caso de haber demandado más que n en la primera etapa. Caso contrario se mantiene firme. En caso de que 2 deba volver a jugar, accede si 2 ha demandado más que $100 - n$ en la primera ronda y 1 ha demandado n o menos en la primera etapa. Caso contrario se mantiene firme.

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

- Jugador 1 propone como dividir el dólar (sin dejar plata sobre la mesa).
- Jugador 2 Acepta de forma inmediata o en menos de un tiempo predeterminado (e.g., un minuto) debe hacer una contraoferta de cómo dividir el dólar.
- El juego continua indefinidamente.
- Si el juego termina en la etapa k y el pago para un jugador es n, su utilidad es $\delta^k n$ donde $\delta \in (0, 1)$.
- Este juego tiene un único EPS.

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

- Jugador 1 propone como dividir el dólar (sin dejar plata sobre la mesa).
- Jugador 2 Acepta de forma inmediata o en menos de un tiempo predeterminado (e.g., un minuto) debe hacer una contraoferta de cómo dividir el dólar.
- El juego continua indefinidamente.
- Si el juego termina en la etapa k y el pago para un jugador es n, su utilidad es $\delta^k n$ donde $\delta \in (0, 1)$.
- Este juego tiene un único EPS.

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

- Jugador 1 propone como dividir el dólar (sin dejar plata sobre la mesa).
- Jugador 2 Acepta de forma inmediata o en menos de un tiempo predeterminado (e.g., un minuto) debe hacer una contraoferta de cómo dividir el dólar.
- El juego continua indefinidamente.
- Si el juego termina en la etapa k y el pago para un jugador es n, su utilidad es $\delta^k n$ donde $\delta \in (0,1)$.
- Este juego tiene un único EPS.

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

- Jugador 1 propone como dividir el dólar (sin dejar plata sobre la mesa).
- Jugador 2 Acepta de forma inmediata o en menos de un tiempo predeterminado (e.g., un minuto) debe hacer una contraoferta de cómo dividir el dólar.
- El juego continua indefinidamente.
- Si el juego termina en la etapa k y el pago para un jugador es n, su utilidad es $\delta^k n$ donde $\delta \in (0, 1)$.
- Este juego tiene un único EPS.

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

- Jugador 1 propone como dividir el dólar (sin dejar plata sobre la mesa).
- Jugador 2 Acepta de forma inmediata o en menos de un tiempo predeterminado (e.g., un minuto) debe hacer una contraoferta de cómo dividir el dólar.
- El juego continua indefinidamente.
- Si el juego termina en la etapa k y el pago para un jugador es n, su utilidad es $\delta^k n$ donde $\delta \in (0, 1)$.
- Este juego tiene un único EPS.

Theorem

Considere las siguientes estrategias. Para el jugador que debe ofertar cómo dividir el dólar, el se queda con $\frac{100}{1+\delta}$. Para el adversario, aceptar esta oferta o cualquiera mejor y rechazar cualquier peor.

Demostración.

Mostramos que estas estrategias son un EPS. Supongamos que es el turno de quien debe hacer una oferta. Si demanda $\frac{100}{1+\delta}$ va a ser aceptada por su adversario. No hay razón para demandar menos. Si demanda más, el rival, usando la estrategia de equilibrio, demanda $\frac{100}{1+\delta}$ que debe ser aceptada quedando el que primero oferto con $\delta\frac{100}{1+\delta}$ (no hay incentivos unilaterales a desviarse en la primera y solo la primera ocasión, en que hay oportunidad). $\square$

Theorem

Considere las siguientes estrategias. Para el jugador que debe ofertar cómo dividir el dólar, el se queda con $\frac{100}{1+\delta}$. *Para el adversario, aceptar esta oferta o cualquiera mejor y rechazar cualquier peor.*

Demostración.

Mostramos que estas estrategias son un EPS. Supongamos que es el turno de quien debe hacer una oferta. Si demanda $\frac{100}{1+\delta}$ va a ser aceptada por su adversario. No hay razón para demandar menos. Si demanda más, el rival, usando la estrategia de equilibrio, demanda $\frac{100}{1+\delta}$ que debe ser aceptada quedando el que primero oferto con $\delta\frac{100}{1+\delta}$ (no hay incentivos unilaterales a desviarse en la primera y solo la primera ocasión, en que hay oportunidad). $\square$

Modelo de Ofertas Alternantes de Rubinstein

Demostración.

Ahora supongamos que es el turno de quien debe aceptar o rechazar y contraofertar. Obsérvese que si es el turno del que debe decidir si acepta o no y contraofertar, la situación puede ser que le estan ofreciendo $100 - n$ donde n es lo que demanda el oferente (este no es necesariamente el equilibrio pero si un subjuego posible). Si $100 - n \geq \delta \frac{100}{1+\delta}$ acepta (como indica la estrategia de equilibrio) recibe $100 - n$. Si rechazara y a partir de ese momento se sigue jugando el equilibrio va demandar $\frac{100}{1+\delta}$ que debe ser aceptado por su rival. En valor presente es $\delta \frac{100}{1+\delta}$. Luego no hay incentivo a desviarse. Ahora si $100 - n < \delta \frac{100}{1+\delta}$ con las estrategias de equilibrio el rechaza y recibe en valor presente $\delta \frac{100}{1+\delta}$. No tiene incentivos a aceptar $100 - n$. □

- Demostrar que es único es más difícil.

- Robustez: El modelo se extiende de forma natural a problemas de negociación. Véase proposición 2, página 561 de Kreps.
- Kreps, página 562, explora cinco variaciones del problema de Rubinstein.
  1. Si el jugador tiene una opción de salida, prácticamente nada cambia.
  2. Los agentes tienes diferentes factores de descuento. El más paciente se queda con una mayor proporción.
  3. En vez de descuento, costo de rechazar una oferta.

- En estas variaciones así como en todas las versiones anteriores, el juego se acaba después de la primera ronda. EL jugador 1 oferta y 2 acepta.
- La racionalidad del juego de ofertas alternantes es que el que oferta le pasa el peso de la decisión de esperar al adversario. Para evitarlo este acepta.